8.2、 二重积分的计算

一、 利用直角坐标系计算二重积分

二、 利用极坐标计算二重积分

II、二重积分的计算法

二、 利用极坐标计算二重积分

有些二重积分，积分区域D的边界用极坐标方程来表示比较方便，且被积函数用极坐标变量r(或ρ)、θ表达比较简单。这时，我们就可以利用极坐标计算二重积分。

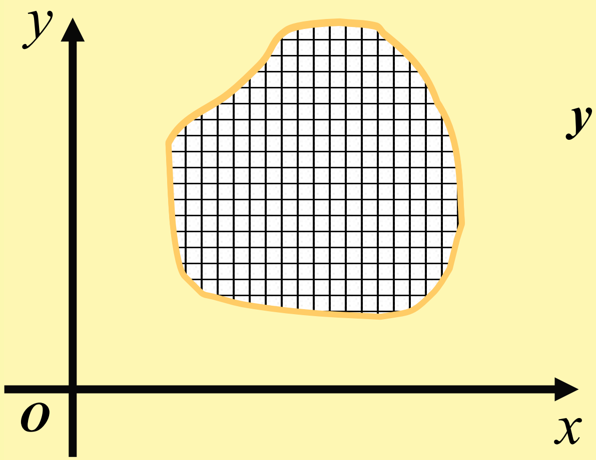
复习：直角坐标系与极坐标系的关系：

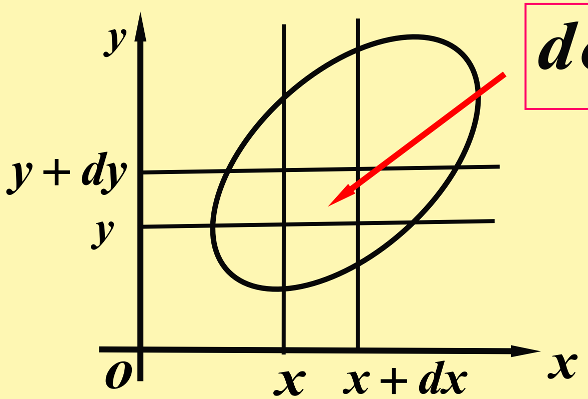
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad r \geq 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi \quad \text{或} \ -\pi < \theta \leq \pi$$

按二重积分的定义

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

在直角坐标下，用平行于坐标轴的直线网划分区域D，



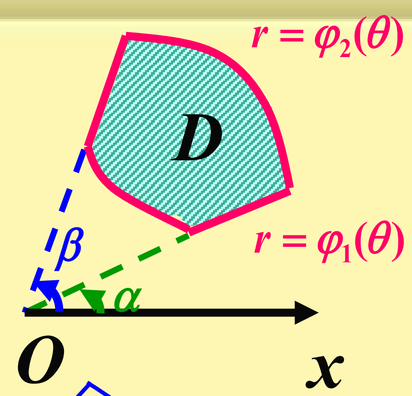


$$\boxed{d\sigma = dxdy}$$

------直角坐标系中的面积元素

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(x,y)dxdy$$

1、极坐标系下的二重积分的形式

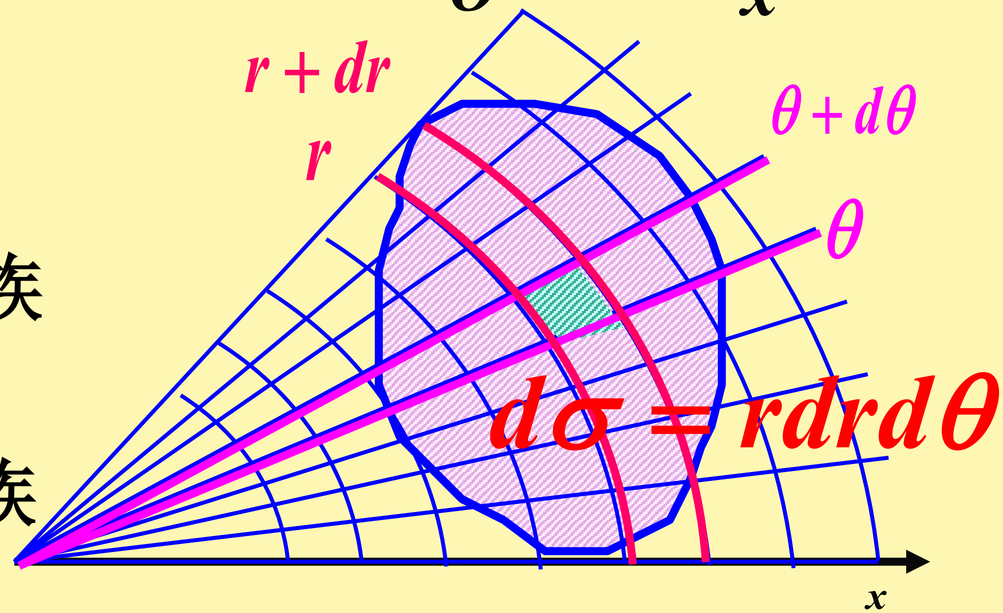


假定从极点O出发且穿过闭区域D内部的射线与D的边界曲线相交不多于两点。

我们用下面方法分割

(1)以极点为中心的一族同心圆：ρ =常数，

(2)从极点出发的一族射线：θ=常数，



$\boxed{d\sigma=rdrd\theta}$ ------极坐标系中的面积元素

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta.$$

2、如何化为两次单积分

积分顺序：一般是先积r后积θ

定限的方法：依D的特点：

(1) 极点在D外

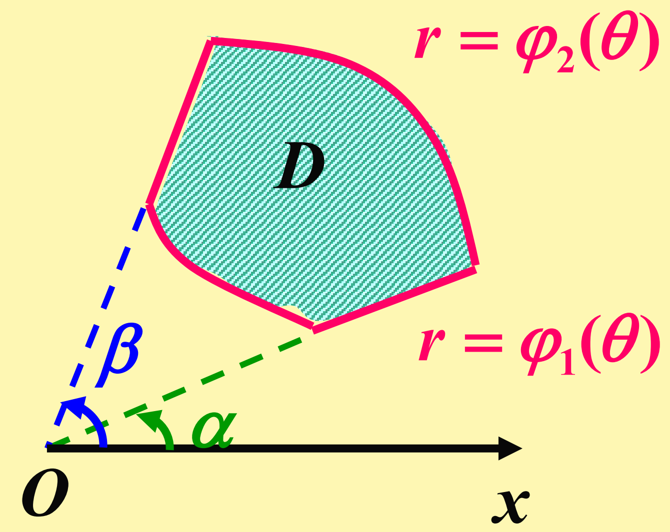
设积分区域D可用不等式

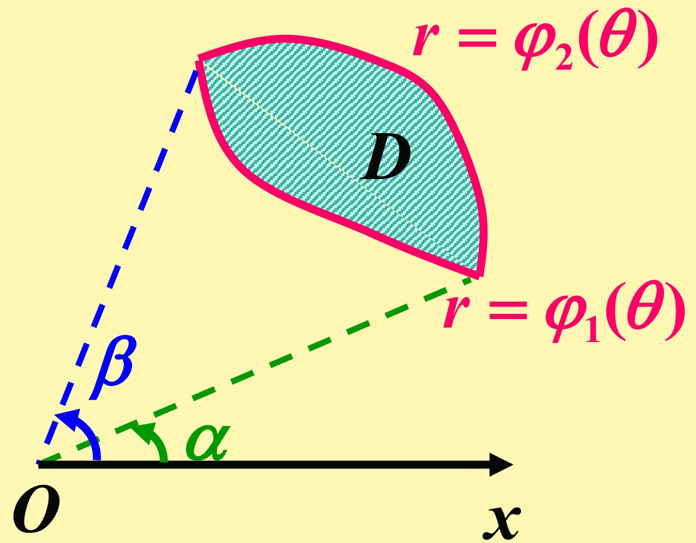
$\varphi_1(\theta) \le r \le \varphi_2(\theta), \alpha \le \theta \le \beta$

来表示(如图)

其中函数$\varphi_1(\theta), \varphi_2(\theta)$

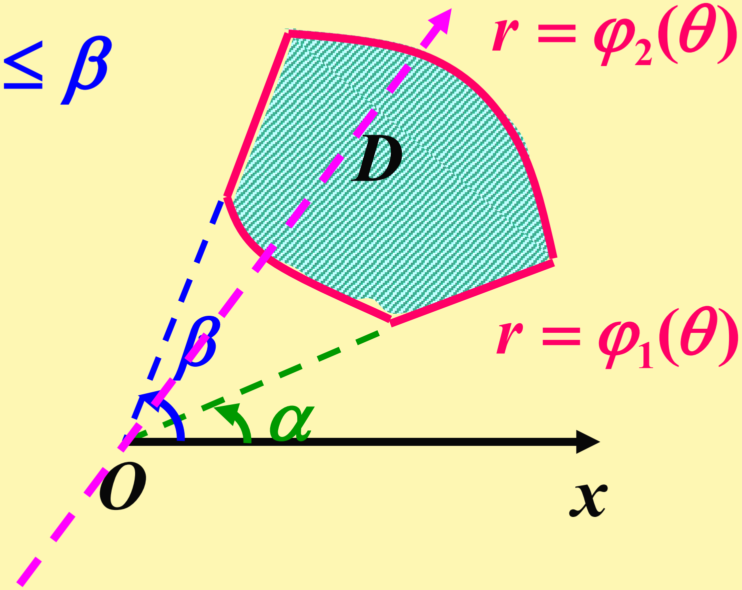
在区间$[\alpha, \beta]$上连续。

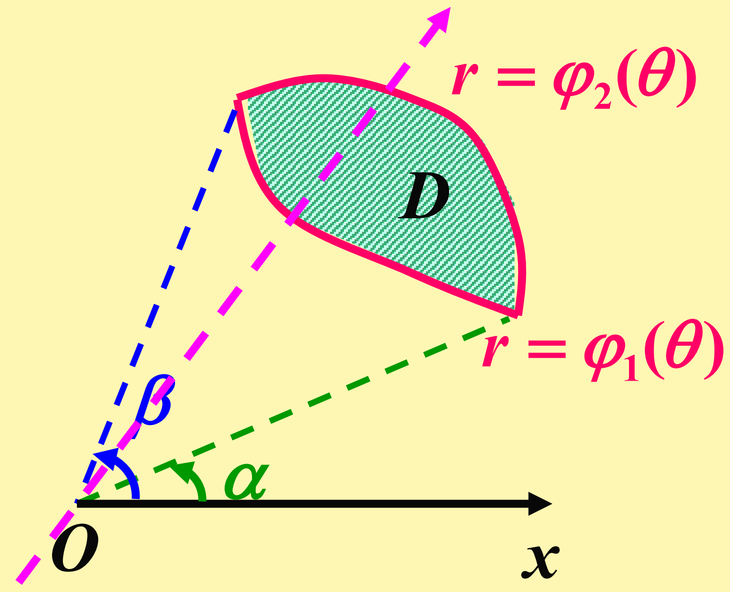




$D: \varphi_1(\theta) \le r \le \varphi_2(\theta)$

$\alpha \le \theta \le \beta$





$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr\right] d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr$$

箭头:

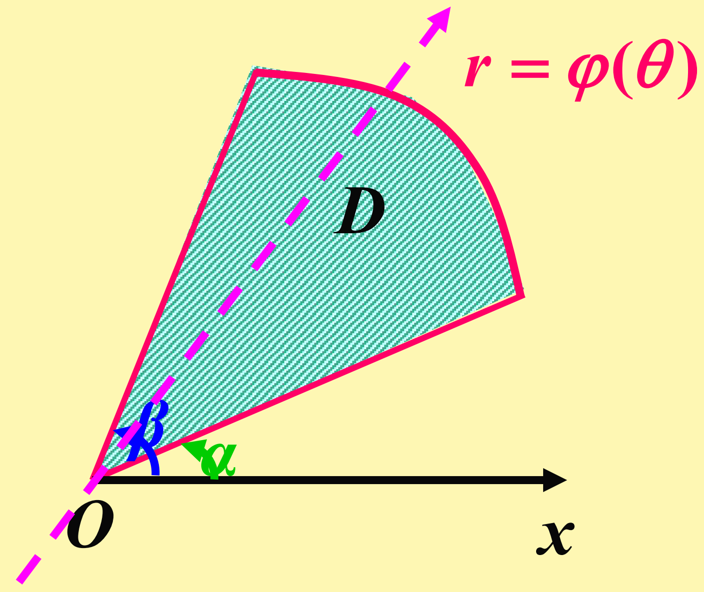
自内向外

逆时针转动

(2) 极点在D的边界上时

闭区域D用不等式表示

$0 \le r \le \varphi(\theta), \alpha \le \theta \le \beta$



$$\iint_D f(x,y)d\sigma$$

$$= \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[\int_0^{\varphi(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr\right] d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr$$

箭头：

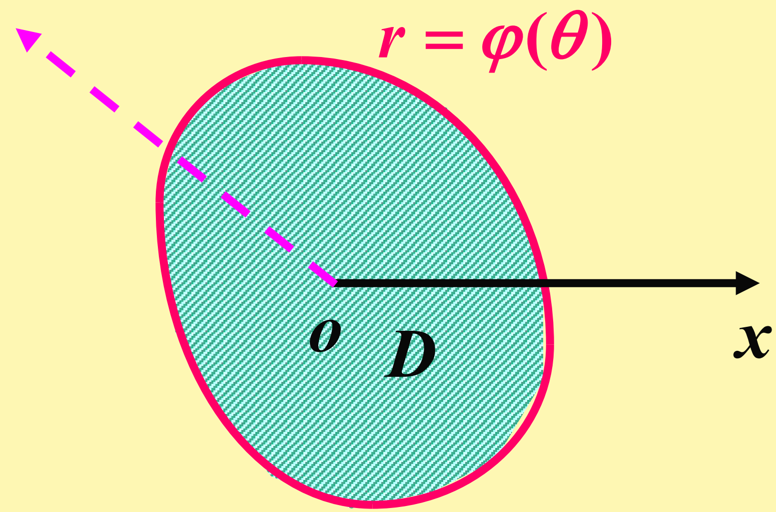
自内向外

逆时针转动

(3) 极点在D的内部时

闭区域D用不等式表示

$D: 0 \le r \le \varphi(\theta), 0 \le \theta \le 2\pi$



$$\iint_D f(x, y) d\sigma$$

$$= \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, dr$$

箭头：自内向外　逆时针转动

利用极坐标计算二重积分

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr$$

"一代，二换，三定限"

积分区域D的表示范围: $r \geq 0$, 或$\rho \geq 0$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \quad 或 \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

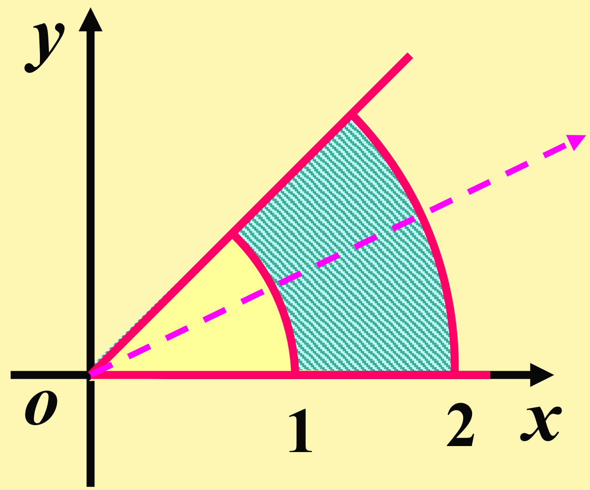
说明：增加或改变被积函数在一点$r=0$ 和一条线 $\varphi = 2\pi (\varphi = -\pi)$上的值对二重积分不会发生影响

例1 将下列积分化为极坐标形式,并计算积分值。

(1) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\arctan\frac{y}{x}dxdy$,

$D:1\le x^2+y^2\le 4\,,y=x,y=0$

所围成的位于第 I 象限的部分



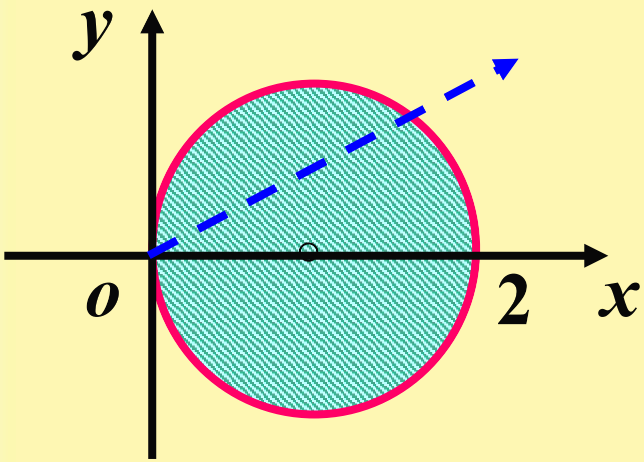
积分区域D的图形为:

$D:\ 1\le r\le 2,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$

$\therefore$ 原式 $=\iint\limits_D r^2\cdot\theta r drd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_1^2 r^2\cdot\theta\cdot rdr$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_1^2 r^3\cdot\theta dr=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta d\theta\int_1^2 r^3dr=\frac{15}{128}\pi^2$

(2) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, 其中 $D: x^2+y^2 \le 2x$



积分区域$D: (x-1)^2+y^2 \le 1$

$$D:\quad 0 \le r \le 2\cos\theta,$$

$$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint\limits_D r\cdot r\,dr\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r\cdot r\,dr$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8}{3}\cos^3\theta\,d\theta = \frac{8}{3}\cdot 2\cdot I_3 = \frac{8}{3}\cdot 2\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{32}{9}$$

方法：结合图形与不等式得到积分限

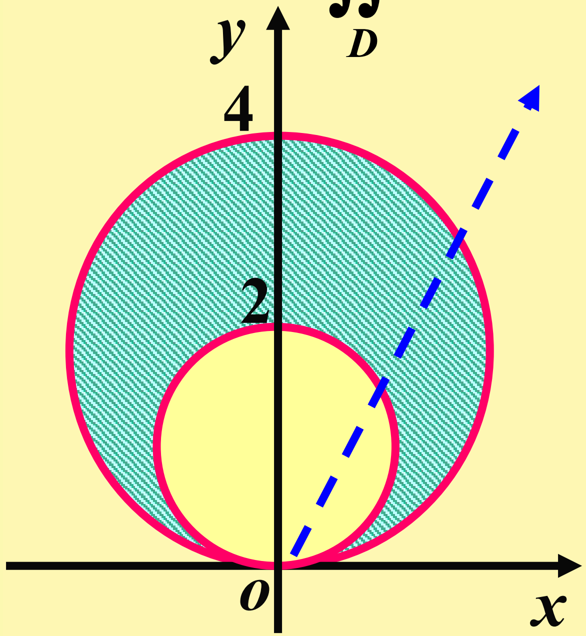
复习：证明 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x$

$$=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为偶数}\\[2ex] \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$$

高数上册 P225 例14

点火公式，可推导出Wallis公式：关于圆周率的无穷乘积的公式

例 2　将 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 化为极坐标系下的二次积分



闭区域D用不等式表示

$$D:\quad 2y \le x^2+y^2 \le 4y$$

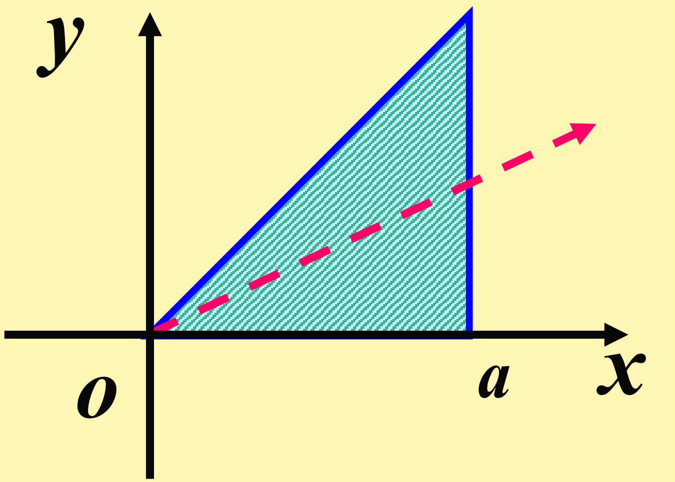
$$D: 2\sin\theta \le r \le 4\sin\theta, 0 \le \theta \le \pi$$

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$$

$$= \int_0^{\pi} d\theta \int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$$

此题若在直角坐标系下求积分，不容易！

例 把积分 $\int_0^a dx\int_0^x \sqrt{x^2+y^2}dy\ (a>0)$化为极坐标形式，并计算积分值。



解 $D: 0\le x\le a,\ 0\le y\le x;$

用极坐标表示为：

$$D: 0\le r\le \frac{a}{\cos\theta},\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{4};$$

$$I=\int_0^a dx\int_0^x \sqrt{x^2+y^2}dy=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}d\sigma$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{\frac{a}{\cos\theta}} r\cdot r dr=\frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{\cos^3\theta}=\frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta d\theta$$

$$I=\int_0^a dx\int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,dy=\frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta d\theta$$

$$\because \int \sec^3\theta d\theta=\int \sec\theta d\tan\theta$$

$$=\sec\theta\tan\theta-\int \tan\theta\cdot\sec\theta\tan\theta d\theta$$

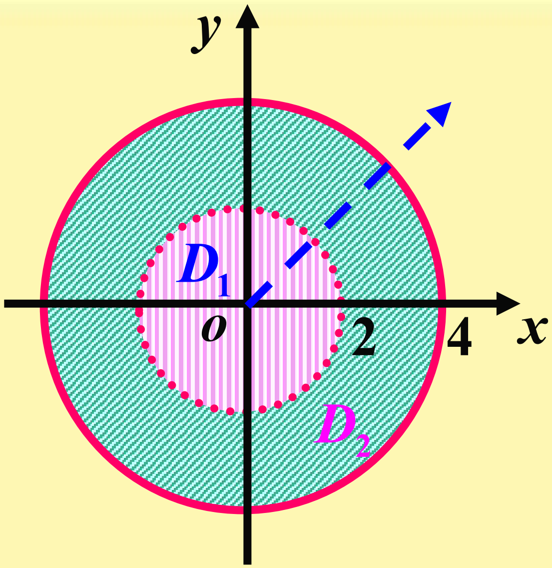
$$=\sec\theta\tan\theta-\int \sec^3\theta d\theta+\int \sec\theta d\theta$$

$$\therefore \int \sec^3\theta d\theta=\frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta+\frac{1}{2}\ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right|+C$$

于是

$$I=\frac{a^3}{3}\cdot\frac{1}{2}\left[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)\right]=\frac{a^3}{6}\left[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)\right]$$

例：计算 $\iint\limits_D |4-x^2-y^2|dxdy$



$D: x^2+y^2\le 16 \ = D_1 \cup D_2$

$D_1: x^2+y^2\le 4,$

$D_2: 4\le x^2+y^2\le 16$

$D_1: 0\le r\le 2, 0\le\theta\le 2\pi \qquad D_2: 2\le r\le 4, 0\le\theta\le 2\pi$

$$\therefore \iint\limits_D |4-x^2-y^2|dxdy = \iint\limits_{D_1\cup D_2} |4-x^2-y^2|dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^2 (4-r^2)\cdot rdr + \int_0^{2\pi} d\theta\int_2^4 (r^2-4)\cdot rdr$$

$$= 8\pi + 72\pi \ = 80\pi$$

小结： 利用极坐标计算二重积分

(1) 积分顺序通常是先 r后θ

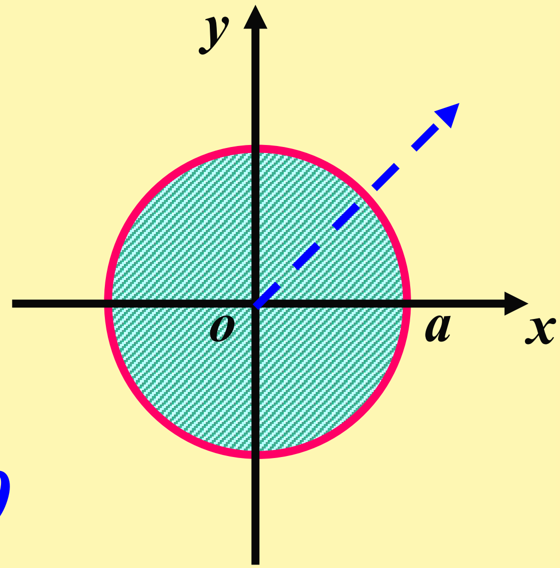
(2) D的极坐标表示

如D的边界是由直角坐标方程:$y=f(x)$ 给出，通常可从几何意义去确定D的极坐标表示（图形是重要的）或利用$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$进行变换。

(3)坐标系的选取

当D的边界用极坐标表示比较简单或D是圆域、圆的一部分时,当被积函数形如$f(x^2+y^2)$、$f\left(\dfrac{y}{x}\right)$、$f\left(\dfrac{x}{y}\right)$时, 可考虑选用极坐标系。

例 3　计算 $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy$,其中$D$是由中心在原点,半径为 a 的圆周所围成的闭区域。



解　积分区域D的图形

D: $0\le r\le a,\quad 0\le\theta\le 2\pi$

$$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^a e^{-r^2}rdr\right]d\theta$$

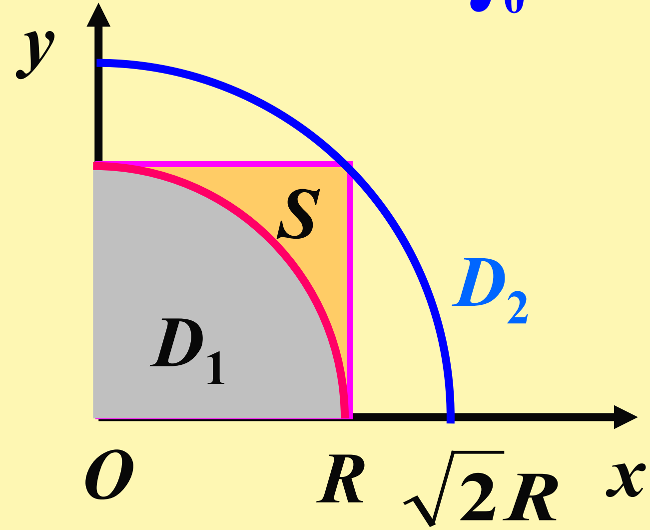
$$=\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^a d\theta=\frac{1}{2}(1-e^{-a^2})\int_0^{2\pi}d\theta=\pi(1-e^{-a^2})$$

注意　本题如果用直角坐标计算,由于积分 $\int e^{-x^2}dx$不能用初等函数表示,所以算不出来。

例 3 $\displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy=\pi(1-e^{-a^2}),\quad D:\ x^2+y^2\le a^2$

利用上述结果计算工程上常用的广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\lim_{R\to+\infty}\int_0^R e^{-x^2}dx$$



$$\left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2$$

$$=\int_0^R e^{-x^2}dx\cdot\int_0^R e^{-y^2}dy$$

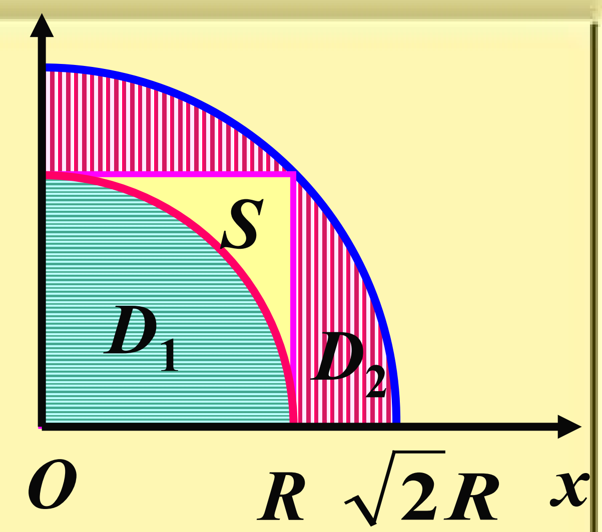
$$=\iint_S e^{-x^2-y^2}dxdy$$

显然 $D_1\subset S\subset D_2$

$$\iint_{D_1}<\iint_S<\iint_{D_2}$$

$$\iint_{D_1}e^{-x^2-y^2}dxdy=\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2})$$

计算 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$



$D_2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 2R^2, x \ge 0, y \ge 0\}$,

$S = \{(x, y) \mid 0 \le x \le R, 0 \le y \le R\}$

$D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le R^2, x \ge 0, y \ge 0\}$,

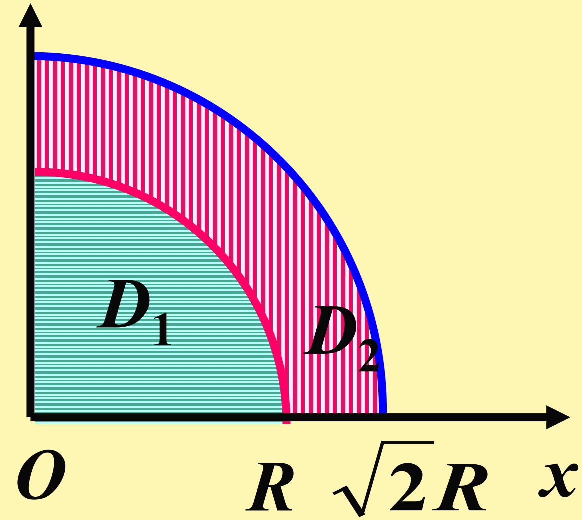
显然 $D_1 \subset S \subset D_2$(如图)

由于$e^{-x^2-y^2} > 0$,从而在这些闭区域上的二重积分之间有不等式

$$\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2}dxdy < \iint_{S} e^{-x^2-y^2}dxdy < \iint_{D_2} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

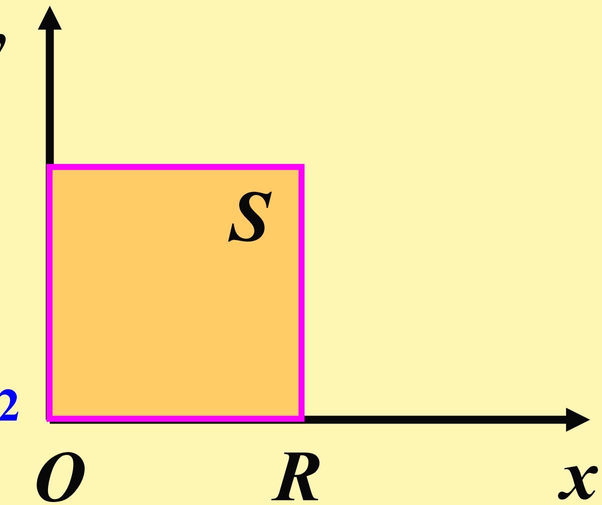
又 $\because \iint\limits_{D} e^{-x^2-y^2}dxdy = \pi(1-e^{-a^2})$

$D:\ x^2+y^2 \le a^2$



$\therefore \iint\limits_{D_2} e^{-x^2-y^2}dxdy = \dfrac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2})$

$\iint\limits_{D_1} e^{-x^2-y^2}dxdy = \dfrac{\pi}{4}(1-e^{-R^2})$



$\because \iint\limits_{S} e^{-x^2-y^2}dxdy$

$= \int_0^R e^{-x^2}dx \cdot \int_0^R e^{-y^2}dy = \left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2$

$$\iint\limits_{D_1} e^{-x^2-y^2}dxdy < \iint\limits_{S} e^{-x^2-y^2}dxdy < \iint\limits_{D_2} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

计算 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$

$$\because \iint_{D_1} e^{-x^2-y^2}dxdy < \iint_{S} e^{-x^2-y^2}dxdy < \iint_{D_2} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

$$\therefore \frac{\pi}{4}(1-\frac{1}{e^{R^2}}) < \left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2 < \frac{\pi}{4}(1-\frac{1}{e^{2R^2}})$$

令 $R\to+\infty$,上式两端趋于同一极限 $\frac{\pi}{4}$,从而得

$$[\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx]^2=\frac{\pi}{4} \qquad \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

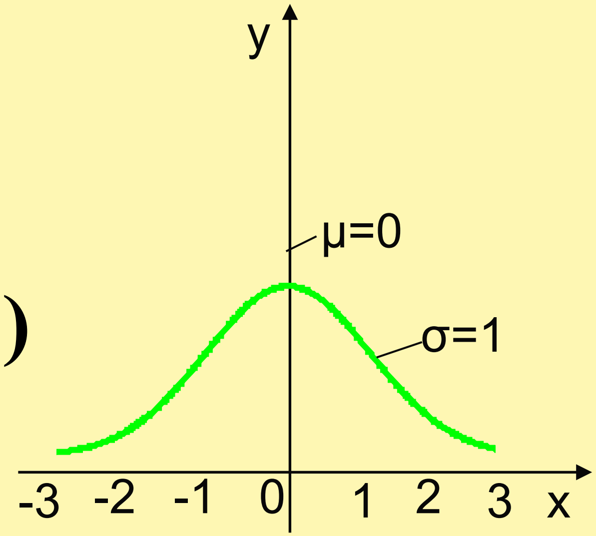
正态总体的函数表示式

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

当μ= 0，σ=1时

标准正态总体的函数表示式

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$



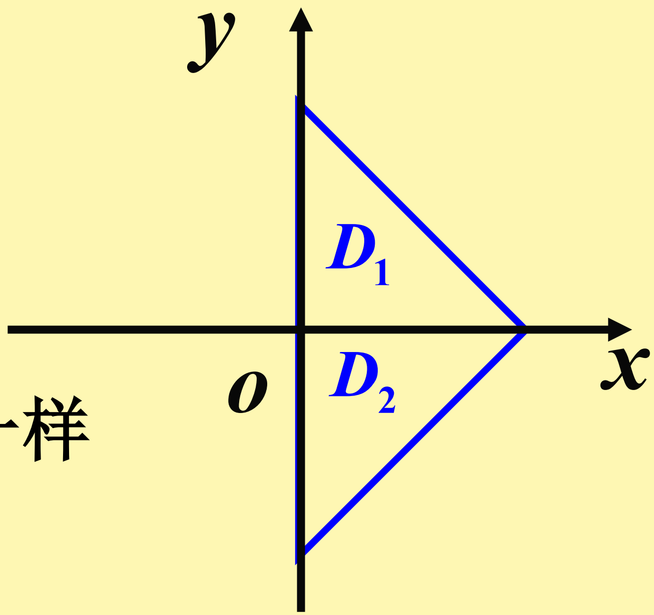
$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}d\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)=1$$

例5 选用适当的坐标系计算下列二重积分

(1) $\iint\limits_D (|x|+|y|)d\sigma$,

其中$D:|x|+|y|\le 1(x\ge 0)$



注意在不同区域被积函数表达式不一样

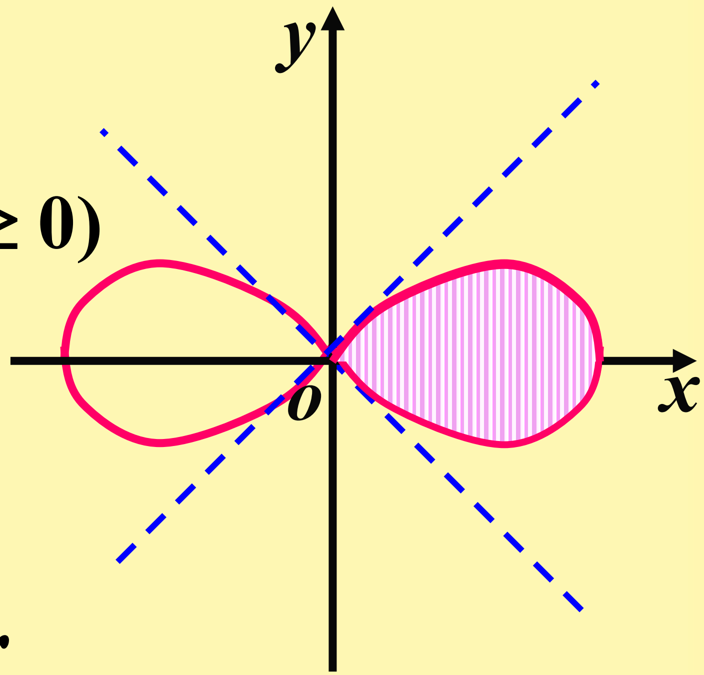
解 $\iint\limits_D (|x|+|y|)d\sigma$

$= \iint\limits_{D_1} (|x|+|y|)d\sigma + \iint\limits_{D_2} (|x|+|y|)d\sigma$

$= \int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x+y)dy + \int_0^1 dx\int_{x-1}^0 (x-y)dy = 2\times\frac{1}{3}$

(2) $\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,d\sigma$ 其中D:

$(x^2+y^2)^2 \le a^2(x^2-y^2)\ (a>0, x\ge 0)$



解 $\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,d\sigma$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{a^2\cos 2\theta}} \sqrt{a^2-r^2}\cdot r\,dr$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{a^2\cos 2\theta}} d\theta$$

$$=\frac{\pi a^3}{6}-\frac{10}{9}+\frac{8\sqrt{2}}{9}$$

双扭线:

$r^2=a^2\cos 2\theta$

$$D:\begin{cases} 0\le r\le a\sqrt{\cos 2\theta} \\ -\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

8.2.3 二重积分的换元法

定理8.2.1 设函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续

变换$x = x(u,v), y = y(u,v)$,将uov平面上的区域D_1

一对一地映射成xoy平面上的区域D,且

$x = x(u,v),\quad y = y(u,v)$ 具有一阶连续偏导数,

雅可比（Jocobi）行列式$J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0,\ (u,v) \in D_1$,则

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f\left[x(u,v), y(u,v)\right]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv \quad (5)$$

公式（5）称为二重积分的换元公式

设二重积分 $\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma$，作坐标变换 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

xoy平面上的区域D $\rightarrow$ 极坐标系下的区域D_1

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| drd\theta$$

$$= \iint\limits_{D} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$$

上式右端是在 D_1 上确定积分限

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

面积元素

$$d\sigma = dxdy$$

$$= r\,drd\theta$$

例7 计算椭球体 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$ 的体积。

解 由对称性 $V=8\iint\limits_{D} c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}\,dxdy$

其中 $D=\left\{(x,y)\middle|\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1, x\ge 0, y\ge 0\right\}$

作变换：$\begin{cases} x=ar\cos\theta \\ y=br\sin\theta \end{cases}$ $\quad a>0, b>0, r\ge 0, 0\le\theta\le 2\pi$

此变换称为广义极坐标变换，在此变换下与区域 D 对应的区域 D_1 为

$$D_1=\left\{(r,\theta)\middle|0\le r\le 1, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$$

作变换:$\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}$ $a > 0, b > 0, r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$D_1 = \left\{ (r,\theta) \middle| 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

雅可比行列式 $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = abr$

$$V = 8\iint_D c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}dxdy \quad = 8\iint_{D_1} c\sqrt{1 - r^2}\,abr\,drd\theta$$

$$= 8abc\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r\sqrt{1 - r^2}dr \quad = \frac{4}{3}\pi abc$$

特别地：当$a = b = c = R$时, 球的体积$V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$

利用广义极坐标变换可得椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$所围的面积

$$D:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1 \qquad D_1: D\text{在第一象限的部分}$$

$$\text{作变换}:\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases} \qquad J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=abr$$

$$S=\iint_D d\sigma = 4\iint_{D_1} d\sigma = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 abr\,dr$$

$$=4ab\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\cdot\int_0^1 r\,dr = \pi ab$$

方法二：利用定积分的几何意义